



گزینه ۱

۱

$x = -2$ ابتدای بازه و نقطه بحرانی است. در ضمن نقاط ابتدا و انتهای بازه، اکسترمم نسبی نمی‌توانند باشند؛ پس جواب گزینه ۱ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

در $x = -1$ ، ماکزیمم نسبی داریم.

در $x = 0$ و $x = 1$ هم مینیمم نسبی داریم.

گزینه ۲

۲

اولاً این نقطه، روی تابع است:

$$f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2a + b}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2a + b = 4$$

ثانیاً مشتق تابع f در $x = 2$ برابر صفر است:

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 12) - 2x(ax + b)}{(x^2 + 12)^2} \xrightarrow{f'(2)=0} 16a - 8a - 4b = 0 \Rightarrow b = 2a$$

از حل دو معادله $b = 2a$ و $2a + b = 4$ داریم: $a = 1$ و $b = 2$. پس:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 12} \Rightarrow f(6) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

عبارت داخل جزء صحیح را در نظر بگیرید. داریم:

$$x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$$

می‌توانیم عبارت جزء صحیحی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left[\frac{2}{1 + x^2} \right] = \begin{cases} 2 & ; x = 0 \\ 1 & ; x \in [-1, 1] - \{0\} \\ 0 & ; x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \end{cases}$$

بنابراین برای تابع f داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \in [-1, 1] \\ 0 & ; x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \end{cases}$$

واضح است که این تابع در دو نقطه $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. همچنین در $\mathbb{R} - [-1, 1]$ تابع ثابت صفر است و بی‌شمار نقطه بحرانی دارد.

f' را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + k} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2 + k) - 2x(x)}{(x^2 + k)^2} = \frac{k - x^2}{(x^2 + k)^2}$$

برای آنکه محدوده صعودی بودن f را پیدا کنیم، باید نامعادله $f' \geq 0$ را حل کنیم:

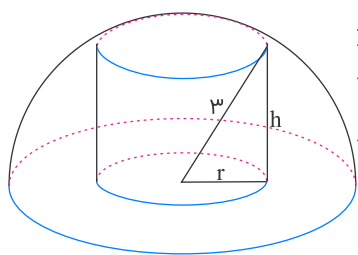
$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{k - x^2}{(x^2 + k)^2} \geq 0 \xrightarrow{k > 0} k - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$$

پس باید $\sqrt{k} = 2$ و در نتیجه $k = 4$ باشد.

مقدار $f'(0)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

اگر شعاع قاعده استوانه را r و ارتفاع آن را h فرض کنیم، داریم:



$$r^2 + h^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 9 - h^2$$

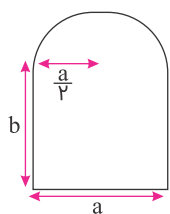
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi (9 - h^2) h = \pi (9h - h^3)$$

$$V' = \pi (9 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \pm \sqrt{3}$$

ارتفاع نمی‌تواند منفی باشد، پس $h = \sqrt{3}$ قابل قبول است.

$$V_{\text{max}} = \pi (9 - 3) \sqrt{3} = 6\sqrt{3}\pi$$

اگر طول مستطیل را a و عرض آن را b بنامیم، داریم:



محیط نیم‌دایره + محیط بخشی از مستطیل = محیط شکل

$$= a + 2b + \frac{1}{2} (2\pi \times \frac{a}{2}) = a + 2b + \frac{\pi a}{2} = \frac{5a}{2} + 2b = 11$$

$$\text{مساحت شکل} = S = ab + \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{a^2}{4} \Rightarrow S = ab + \frac{\pi a^2}{8}$$

چون $\frac{5a}{2} + 2b = 11$ ، داریم:

$$b = \frac{11}{2} - \frac{5a}{4}$$

$$S = a \left(\frac{11}{2} - \frac{5a}{4} \right) + \frac{\pi a^2}{8}$$

برای یافتن اکسترم آن تابع از آن مشتق می‌گیریم و برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{11}{2}a - \frac{5}{4}a^2 + \frac{\pi}{8}a^2 = -\frac{\pi}{8}a^2 + \frac{11}{2}a \Rightarrow S' = -\frac{\pi}{4}a + \frac{11}{2} = 0$$

$$\frac{\pi}{4}a = \frac{11}{2} \Rightarrow a = \frac{22}{\pi} \Rightarrow S_{\text{max}} = -\frac{\pi}{8} \left(\frac{22}{\pi} \right)^2 + \frac{11}{2} \left(\frac{22}{\pi} \right) = \frac{121}{\pi}$$

انتقال در جهت محور y ها هیچ تأثیری روی صعودی و نزولی بودن تابع ندارد. اینکه $g(x)$ در بازه $(0, 3)$ نزولی است، نشان می‌دهد که اگر ۲ واحد به سمت x های منفی برویم، به تابع $f(x)$ می‌رسیم که در بازه $(-2, 1)$ نزولی است. این یعنی جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x		-2		1	
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

پس $x = -2, 1$ ریشه‌های $f'(x)$ هستند.

اما $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 2$ ، یعنی:

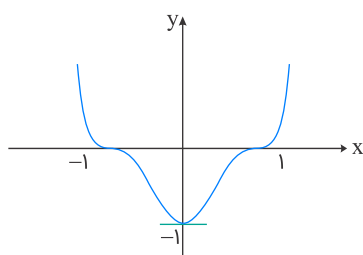
$$3ax^2 + 2bx - 2 = 3a(x + 2)(x - 1)$$

$$\Rightarrow 3ax^2 + 2bx - 2 = 3ax^2 + 3ax - 6a \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$$

به کمک محاسبه مشتق و تعیین علامت آن مشخص می‌شود که تنها در یک نقطه علامت مشتق عوض شده و اکسترم از نوع $\min$ دارد و آن هم $x = 0$ است.

$$y = (x^2 - 1)^3 \Rightarrow y' = 3(2x)(x^2 - 1)^2 = 6x(x - 1)(x + 1)^2$$

$$\Rightarrow y' = 6x(x + 1)^2(x - 1)^2$$



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$y' = 6x(x+1)^2(x-1)^2$	$-$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
$y = (x^2 - 1)^3$	$+\infty$	$\circ$	-1	$\circ$	$+\infty$

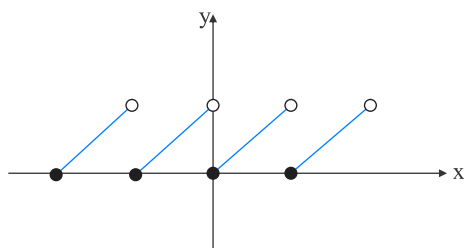
$A(0, -1)$ مینیمم نسبی و مطلق تابع است

دقت کنید چون y' در $x = 0$ ریشه ساده دارد، تغییر علامت می‌دهد و $x = 0$ مینیمم تابع است. نکته: توابع تنها در ریشه ساده یا مکرر مرتبه فرد مشتق خود، اکسترم دارند.

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{اکسترم } f \text{ است} \Rightarrow \text{ریشه ساده} \\ \text{اکسترم } f \text{ نیست} \Rightarrow \text{ریشه مضاعف} \end{cases}$$

$\downarrow$
مماس افقی

نمودار تابع در گزینه ۱ به صورت زیر است:



تابع در تمام نقاط صحیح ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

پس این نقاط بحرانی هستند ولی در سایر نقاط مشتق‌پذیر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: در تابع $f(x) = [x^2]$ در نقاطی که عبارت داخل جزء صحیح، عددی صحیح می‌شود، تابع ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. البته به جز $x = 0$. به علاوه در سایر نقاط تابع ثابت خواهد بود و مشتق در آن‌ها صفر است.

پس این نقاط هم بحرانی هستند؛ بنابراین تمام نقاط دامنه بحرانی محسوب می‌شوند.

گزینه ۳: تابع در $x = 0$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. $\Leftarrow$ بحرانی است. در سایر نقاط ثابت است و مشتق صفر می‌شود. $\Leftarrow$ بحرانی است.

گزینه ۴: ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + 2\sin^2 x = (1 - 2\sin^2 x) + 2\sin^2 x = 1$$

چون تابع ثابت است، پس تمام نقاط آن بحرانی محسوب می‌شوند.

ریشه ساده یا مکرر مرتبه فرد f' طول نقطه اکسترم نسبی است.

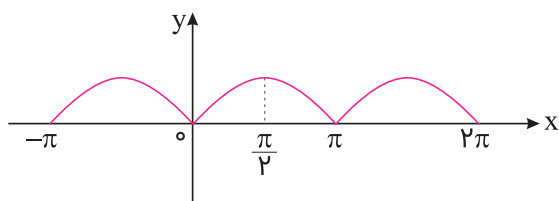
$$f'(x) = (ax - 2)(x^3 - x - 2x + 2) = (ax - 2)(x(x^2 - 1) - 2(x - 1))$$

$$f'(x) = (ax - 2)(x - 1)^2(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{a} \\ x = 1 \text{ مضاعف} \\ x = -2 \end{cases}$$

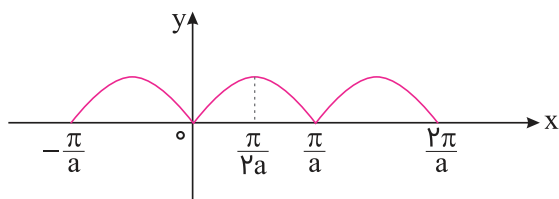
اگر $\frac{2}{a} = 1$ باشد، آنگاه $x = 1$ ریشه مکرر مرتبه فرد f' است و اکسترم است و اگر $\frac{2}{a} = -2$ باشد، آنگاه

$x = -2$ ریشه مضاعف f' است و اکسترم نیست. پس فقط $a = -1$ می‌باشد. دقت کنید در حالت $a = 2$ تابع ۲ اکسترم خواهد داشت.

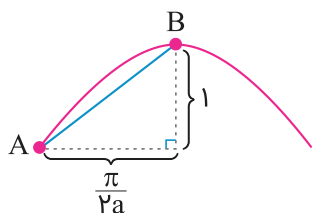
نمودار تابع $y = |\sin x|$ به صورت زیر است:



پس نمودار تابع $f(x) = |\sin ax|$ به صورت زیر است:



فاصله دو نقطه بحرانی متوالی f را حساب می‌کنیم و برابر با $\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم:



$$AB = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow 1 + \frac{\pi^2}{4a^2} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{4a^2} = 4 \Rightarrow a^2 = \frac{\pi^2}{16} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = \left| \sin \frac{\pi x}{4} \right|$ درمی‌آید، پس:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| = \frac{1}{2}$$

باید مشتق تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ را تعیین علامت کنیم:

$$y' = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} = 0$$

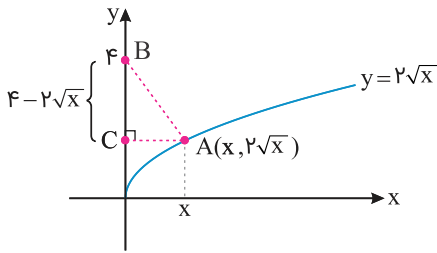
مخرج همواره مثبت است. پس صورت را تعیین علامت می‌کنیم:

صورت: $x(3x - 2)$

x	°			$\frac{2}{3}$
$x(3x-2)$	+	-		+
f	↗	↘	min	↗

بنابراین min تابع در $x = \frac{2}{3}$ رخ می‌دهد و برابر است با:

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{8}{27} - \frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8-12}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$



مختصات نقطه A به صورت $A(x, 2\sqrt{x})$ است. بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{x \times (4 - 2\sqrt{x})}{2} = 2x - x^{\frac{3}{2}}$$

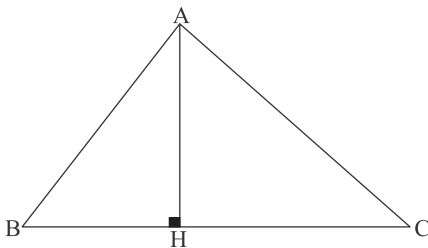
حالا مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = 2 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow 4 = 3\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{9}$$

بیشترین مقدار S در $x = \frac{16}{9}$ رخ می‌دهد:

$$\max(S) = S\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{16}{9} \left(4 - 2 \times \sqrt{\frac{16}{9}}\right) = \frac{8}{9} \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{32}{27}$$

اگر اندازه قاعده را برابر a و اندازه ارتفاع وارد بر قاعده را برابر h فرض کنیم، خواهیم داشت: $a + h = 18$.
حال مساحت مثلث برابر است با $S = \frac{1}{2}a.h$ که باید بیشترین مقدار ممکن شود.



$$a + h = 18 \Rightarrow h = 18 - a$$

$$S = \frac{1}{2}a.(18 - a) \Rightarrow S = 9a - \frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow S' = 9 - a = 0 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow h = 9$$

$$\max S = \frac{1}{2} \times 9 \times 9 = \frac{81}{2}$$

راه اول: ابتدا نقاط بحرانی هر ضابطه را که در شرط جلوی ضابطه هست، می‌یابیم. عدد تغییر ضابطه را هم کنترل می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x < 0 \\ 2x + 2 & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 2x + 1 = 1 \\ f'(0^+) = 2x + 2 = 2 \end{cases}$$

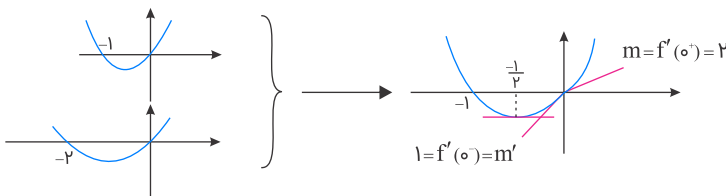
چون $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ ، عدد $x = 0$ نقطه گوشه (زاویه‌دار) محسوب می‌شود و چون مشتق‌پذیر نیست، بحرانی محسوب می‌شود.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} < 0 \quad \checkmark \\ 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 > 0 \quad \times \end{cases}$$

تنها $x = -\frac{1}{2}$ را می‌توان پذیرفت. مجموعه نقاط بحرانی $\left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ می‌باشد.

راه دوم: به کمک رسم می‌توان تعداد نقاط بحرانی را شمرد:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & ; x \leq 0 \\ x^2 + 2x & ; x > 0 \end{cases}$$



f دامنه تابع $D_f = (0, +\infty) - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2}$$

نقطه بحرانی، نقطه‌ای است که مشتق تابع در آن برابر صفر است یا مشتق در آن وجود ندارد. از طرفی دامنه تابع f با دامنه مشتق آن یکسان است؛ بنابراین برای پیدا کردن طول نقاط بحرانی، کافی است معادله $f' = 0$ را حل کنیم.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ &\Rightarrow \frac{9}{2}\sqrt[6]{x^7} = 1 \Rightarrow \sqrt[6]{x^7} = \frac{2}{9} \xrightarrow{x \in D_f} x = \sqrt[6]{\left(\frac{2}{9}\right)^6} \end{aligned}$$

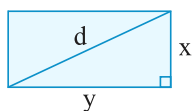
تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد.

$$y = x^3 + 3x^2 + ax - 4 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x + a$$

می‌دانیم ریشه‌های ساده مشتق، طول نقاط اکسترمم نسبی است و در این سؤال $X_{\min} \cdot X_{\max} = 1$ ، بنابراین:

$$y' = 3x^2 + 6x + a \Rightarrow X_{\min} \cdot X_{\max} = \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3$$

قطر را d و دو ضلع مستطیل را x و y می‌گیریم:



مجموع x و d را ۶ می‌گیریم:

$$x + d = 6$$

با رابطه فیثاغورس، y را برحسب x می‌نویسیم:

$$y = \sqrt{d^2 - x^2} = \sqrt{\underbrace{(d - x)}_{6-x} \underbrace{(d + x)}_6} = \sqrt{(6 - 2x)(6)} = \sqrt{36 - 12x}$$

مساحت را برحسب متغیر x می‌نویسیم:

$$S(x) = x\sqrt{36 - 12x}$$

نقاط بحرانی S را پیدا می‌کنیم:

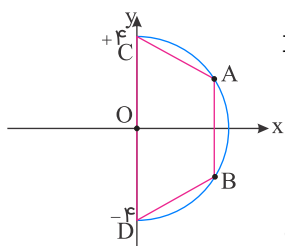
$$S'(x) = \sqrt{36 - 12x} + \frac{-\cancel{12}x}{\cancel{2}\sqrt{36 - 12x}} = \frac{36 - 12x - 6x}{\sqrt{36 - 12x}} = \frac{36 - 18x}{\sqrt{36 - 12x}}$$

$x = 2$ نقطه بحرانی تابع S است و دامنه آن $[0, 3]$ است. همچنین نقاط ابتدا و انتهای دامنه هم نقاط بحرانی محسوب می‌شوند اما چون $S(0) = S(3) = 0$ ، پس قابل قبول نیستند. مقدار تابع S را در $x = 2$ حساب می‌کنیم:

$$S(2) = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{\max}$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2} = \lambda \pi \Rightarrow r = 4$$

اگر $O(0,0)$ مرکز دایره با شعاع ۴ باشد، معادله دایره برابر است با:



$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 16 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{16 - y^2}$$

اگر مختصات نقطه A به صورت $A(x, y)$ باشد، داریم:

$$S_{\text{دو زونقه}} = \frac{AB + DC}{2} \times x = \frac{2y + 8}{2} \times \sqrt{16 - y^2}$$

$$S_{\text{دو زونقه}} = (y + 4)(\sqrt{16 - y^2})$$

برای محاسبه بیشترین مساحت مشتق می گیریم.

$$S' = \sqrt{16 - y^2} + (y + 4)\left(\frac{-2y}{2\sqrt{16 - y^2}}\right)$$

مشتق را برابر با صفر قرار می دهیم.

$$S' = \sqrt{16 - y^2} + (y + 4)\left(\frac{-y}{\sqrt{16 - y^2}}\right) = 0$$

$$16 - y^2 = y^2 + 4y \Rightarrow 2y^2 + 4y - 16 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow (y + 4)(y - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -4 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$S(2) = (2 + 4)\sqrt{16 - 4} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}$$

$$f(x) = x - \sqrt{4 - x^2} \quad ; \quad D_f = [-2, 2]$$

$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\begin{cases} y' = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} * \\ y' \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

* دقت کنید از عمل $y' = 0$ که باید با به توان ۲ رساندن طرفین $-1 = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ حل شود، ۲ جواب

$x = \pm\sqrt{2}$ به دست می‌آید که $x = \sqrt{2}$ در معادله $y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ صادق نیست و فقط $x = -\sqrt{2}$

جواب است!

x	-۲	$-\sqrt{2}$	۲
f(x)	-۲	$-2\sqrt{2}$ ↓ min	۲ ↓ max

$$R_f \in [-2\sqrt{2}, 2]$$

